



TITLE:

Hybrid topological defect における half charge vortex 解(流体における 波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

松岡, 千博

CITATION:

松岡, 千博. Hybrid topological defect における half charge vortex 解(流体における波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1993, 830: 254-261

ISSUE DATE:

1993-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83337>

RIGHT:

Hybrid topological defect における half charge vortex 解

名大理

松岡千博

1. 序論

Nematic liquid crystal や³He 中に整数の topological charge を持った渦 (defect) と同じ位置に現れ、安定した構造をつくる半奇整数の charge を持った topological defect の存在が報告されている^{1),2)}。これらはその終端が整数 charge の渦で終わらない限り、無限遠まで defect の tail が線状 (二次元) または面状 (三次元) に伸び、その線 (または面) を境として場の振幅の符号が逆転する。これは、この境界線 (または境界面) をはさんで場の位相が π だけ jump することに対応している。以下では二次元の場合に話を限定し、この、整数 charge の渦 + 半奇整数 charge の渦 + tail (interface) という hybrid な構造を持った defect を記述するモデル方程式を与え、その stationary な解を議論する。

2. モデル方程式における phase coupling

$O(2) \cong SO(2) \times Z_2$ 対称性を持った mode interaction を記述する式を偏微分方程式に拡張したものとして

$$\Delta W_1 + (r_1 - s_1|W_1|^2 + t_1|W_2|^2)W_1 + \alpha W_1^* W_2 = W_{1t}, \quad (1a)$$

$$\Delta W_2 + (r_2 - s_2|W_2|^2 + t_2|W_1|^2)W_2 + \beta W_1^2 = W_{2t}, \quad (1b)$$

がある^{3),4)}。ここで $r_i \geq 0$, $s_i \geq 0$, t_i ($i = 1, 2$), α , β は実数、添字の t は時間微分を表わす。また $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。場 W_1 , W_2 を振幅と位相とに分け

$$W_1 = U_1 e^{i\theta_1}, \quad W_2 = U_2 e^{i\theta_2},$$

として方程式(1)に代入すると、 U_i , θ_i について

$$\Delta U_1 - (\nabla \theta_1)^2 U_1 + (r_1 - s_1 U_1^2 + t_1 U_2^2) U_1 + \alpha U_1 U_2 \cos \phi = U_{1t}, \quad (2a)$$

$$\Delta U_2 - (\nabla \theta_2)^2 U_2 + (r_2 - s_2 U_2^2 + t_2 U_1^2) U_2 + \beta U_1^2 \cos \phi = U_{2t}, \quad (2b)$$

$$U_1 \Delta \theta_1 + 2 \nabla \cdot U_1 \theta_1 + \alpha U_1 U_2 \sin \phi = U_1 \theta_{1t}, \quad (3a)$$

$$U_2 \Delta \theta_2 + 2 \nabla \cdot U_2 \theta_2 - \beta U_1^2 \sin \phi = U_2 \theta_{2t}, \quad (3b)$$

なる式が得られる。ここで $\phi = \theta_2 - 2\theta_1$ である。

方程式(3)、(4)が $U_1 U_2 \neq 0$ であって、かつ stationary な解を持つ場合に

$$U_i \Delta \theta_i + 2 \nabla U_i \cdot \nabla \theta_i = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (4a)$$

$$\phi = \theta_2 - 2\theta_1 = 0 \quad \text{or} \quad \pi, \quad (4b)$$

なる場合がある。数値的に stationary かつ安定な解が見つかったのは

$$t_1 = t_2 = \beta = 0, \quad (5)$$

かつ(4)の条件を満たしているときであるので⁵⁾、以下ではこの場合について議論する。

条件(5)より場 W_2 は W_1 に無関係であり、方程式(1b)は Ginzburg- Landau 方程式として知られているものとなる。この方程式の stationary な解として有名なものに Greenberg の渦解と呼ばれるものがあり、原点に渦核があるとしたときの漸近形が

$$W_2 = \begin{cases} (r^{|n|} + O(r^{|n|+2})) e^{in\theta}, & (r \rightarrow 0) \\ \left(1 - \frac{n}{2r^2}\right) e^{in\theta}, & (r \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (6)$$

で与えられる。ここで (r, θ) は二次元の極座標、 n は charge number で整数である。また

$r_2 = s_2 = 1$ とした。

W_1 の位相 θ_1 として上記の θ をとると、方程式(1)のオーダーパラメーター空間は (θ, U_1, U_2) なる要素より構成されることになるが、これは

$$(\theta, U_1, U_2) \longrightarrow (\theta + 2\pi, U_1, U_2), \quad (7a)$$

$$(\theta, U_1, U_2) \longrightarrow (\theta + \pi, -U_1, U_2), \quad (7b)$$

なる変換によって不変である。これより W_2 の位相が 2π 変わるとき、 W_1 の位相は π だけ変わり、それに伴って、 W_1 の振幅がその符号を変えるということが分かる。すなわち W_2 が charge 1 の渦場を作り出すものとすれば、関係(4b)より W_1 の持つ topological charge は $1/2$ でなければならない。 $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = 2\theta_1 - \pi = 2\theta = \pi$ として原点に defect が存在する場合の場の様子を図示したのが図1である。二次元の場合、topological defect は点欠陥としてしか現れないことが群論的考察からわかっている⁷⁾、 $x \geq 0$ の斜線を引いた狭い領域は W_1 の charge が $1/2$ であるということに付随する tail の部分で、topological charge というよりは一種の interface (この帯を境として π だけ W_1 の位相が跳ぶ)である。また、変換(7b)から分かるように、この interface 上で場の振幅は0となる。先に述べたように、半奇整数 charge の defect は整数 charge の defect をその終点とするので、図1の $x < -\epsilon$ (ϵ は defect core を特徴づける微小量; $\epsilon \ll 1$)の領域には phase jump は現れない。これらの状況を記述する方程式(1)の stationary な解として

$$W_1 = \begin{cases} (a_1 r + a_3 r^3 + \dots) e^{i\theta} & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi; \\ U_1(x, y) e^{\frac{\pi}{2}i} & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ U_1(x, y) e^{\frac{3}{2}\pi i} & \text{if } \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi; \end{cases} \quad (8a)$$

$$W_2 = \begin{cases} (b_2 r^2 + b_4 r^4 + \dots) e^{i(2\theta - \pi)} & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi; \\ U_2(x, y) & \text{if } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi; \end{cases} \quad (8b)$$

なるものを考える。我々は今、defect 近傍における解を探しているので、以下では常に $|y| = O(\epsilon) \ll 1$ を仮定する。 W_1 , W_2 の $x < 0$ $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ における解の形は形式的に

は渦解に相当するものであるが、これらは一般に Greenberg の解 (6) とは一致しない。また、 θ_i ($i = 1, 2$) の $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における勾配 = 0 であるから、解 (8) は charge number に関する条件

$$\frac{1}{2\pi} \int \nabla \theta_i \cdot d\mathbf{l}_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \nabla \theta_i \cdot d\mathbf{l}_i = \begin{cases} 1/2 & \text{if } i = 1; \\ 1 & \text{if } i = 2; \end{cases} \quad (9)$$

を満たしている。ここで $d\mathbf{l}_i$ は場 i が記述する defect を囲む線素を表わす。解 (8) における振幅 U_i は $x \leq 0$ の領域の渦解になめらかにつながるように決定される。以下ではこれらの具体的な形を議論する。

3. Stationary な defect 解

まず W_2 について考察する。位相についての式 (4a) は (8b) の形より自動的に満たされるから、振幅のみを考えればよい。振幅 U_2 は

$$\Delta U_2 + (r_2 - s_2 U_2^2) U_2 = 0, \quad (10)$$

を満たす。 $x \geq 0$ かつ原点近傍における解として、 $x = 0$ で $x \leq 0$ の領域の解になめらかにつながるものが存在するとすると、それは

$$U_2 = B_2(x^2 - y^2) + B_4(x^4 - y^4) + O(x^6, y^6), \quad (11)$$

なる形に巾級数展開される。ここで係数 B_i は

$$B_2 = -b_2, \quad B_4 = -\frac{r_2}{12} B_2, \dots,$$

と逐次決定される。また $x = O(1)$ では

$$U_2 = c + X(x) + O(y^2), \quad (y \ll 1) \quad (12)$$

なる形を仮定し、(10) 式に代入すると、 $X(x)$ は

$$X_{xx} + (r_2 - 3s_2c^2)X = 0, \quad (13)$$

なる方程式を満たすことが分かる。ここで c は

$$c^3 - \frac{r_2}{s_2}c + \frac{2B_2}{s_2} = 0, \quad (14)$$

なる三次方程式の実根である。今、 $r_2 - 3s_2c^2 < 0$ と仮定すると、 $x \gg 1$ で発散しない (13) の解は

$$X = Ae^{-Bx}, \quad (15)$$

で与えられる。ここで $B = \sqrt{3s_2c^2 - r_2}$ であり、 A は $x \ll 1$ の解とつながるように決定される。 $r_2 - 3s_2c^2 \geq 0$ の場合には $x \gg 1$ で発散しない (13) の解は $X = \text{const.}$ しかない。この const. は c にくりこめるので、結局 U_2 は $U_2 = c + O(y^2)$ ($x \gg 1$, $y \ll 1$) となる。これは (15) で $A = 0$ とした場合とみなすことができる。従って、以下では $r_2 - 3s_2c^2 < 0$ として議論を進める。

W_1 は

$$\Delta W_1 + (r_1 - s_1|W_1|^2)W_1 + \alpha W_1^* W_2 = 0, \quad (16)$$

なる式を満たしている。(8a) において phase jump を振幅にくりこむと、 W_1 は y について奇関数でなければならないことがわかる。従って、 $x \geq 0$ かつ原点近傍における W_1 として

$$W_1 = i(A_1 y F_1(x) + A_3 y^3 F_3(x) + O(y^5)), \quad (y \ll 1) \quad (17)$$

なる形を仮定し、(16) 式に代入すると、 F_1 について

$$F_{1xx} + (r_1 - \alpha U_2)F_1 = 0, \quad (18)$$

なる式が得られる。また、 $y = 0$ において (17) が $x \leq$ の解とつながる為には

$$A_1 = a_1, \quad F_1 = 1 \quad \text{at} \quad y = 0,$$

(18) 式において U_2 の原点近傍および $x \gg 1$ ($y \ll 1$) における漸近形は (11) 式と (12) 式で与えられる。この解が実際に存在することを言う為には、(11) と (12) 式で記述される領域を結ぶ解を数値的に構成してやらねばならない。その解 U_2 を (18) 式に用いて

$$F_1 = \begin{cases} 1 & \text{at } y = 0, \\ \text{const.} & \text{at } y \rightarrow \infty, \end{cases}$$

なる境界条件を持った解 F_1 が求まれば、 $-\epsilon < x < \infty$, $y \ll 1$ なる領域における defect の構造が決定されることになる。実際の数値計算は次回の報告に譲ることにして、ここでは (11), (12) 式より U_2 の関数形が

$$U_2 = c \tanh^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_2}{2}} x + O(y^2), \quad (x \geq 0, y \ll 1)$$

で近似できるようなものであることのみを述べておく。 $x \geq 0$ においては場 W_1 の変化は一次元的なものである。実際、 $x \ll 1$ で $U_2 \sim c$ であるから、 U_1 には

$$U_1 = \sqrt{\frac{r_1 - \alpha c}{s_1}} \tanh \sqrt{\frac{r_1 - \alpha c}{2}} y, \quad x \gg 1$$

なる形の解が存在する。ただし、 $r_1 - \alpha c > 0$ が仮定されている。これは $x \gg 1$ 、すなわち、渦から遠く離れた領域における overall な解であり、 $y = 0$ line に π だけの phase jump を持ったものとなっている。

4. まとめ

我々は couple した二つの場が作り出す hybrid な構造を持った defect について議論をしてきた。ここでは空間が二次元の場合を考察したが、用いたモデル方程式 (1) は、ラプラシ

アンを単純に三次元に拡張しただけでは ^3He 中で見つかった、渦+半奇整数渦 (disclination vortex)²⁾ を記述するのには適当でない。これは方程式(1) がシステムの持つ対称性 ($\text{SO}(3)$ 対称性) を反映したものとなっていないからである⁷⁾。従って、三次元空間中における hybrid topological defect を記述する為には、新たなモデル方程式の導出を行ってやる必要がある。

参考文献

- 1) O. D. Lavrentovich and S. S. Rozhkov, Sov. Phys. JETP Lett. **47** (1988) 255.
- 2) Y. Kondo, J. S. Korhonen, M. Krusius, V. V. Dmitriev, E. V. Thuneberg and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 3331.
- 3) D. Armbruster, J. Guckenheimer and P. Holms, Physica D **29** (1988) 257.
- 4) S. Sasa, T. Mizuguchi and M. Sano, Europhys. Lett. **19** (1992) 593.
- 5) S. Sasa, private communication.
- 6) J. M. Greenberg, SIAM J. Appl. Math. **39** (1980) 301.
- 7) N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 591.

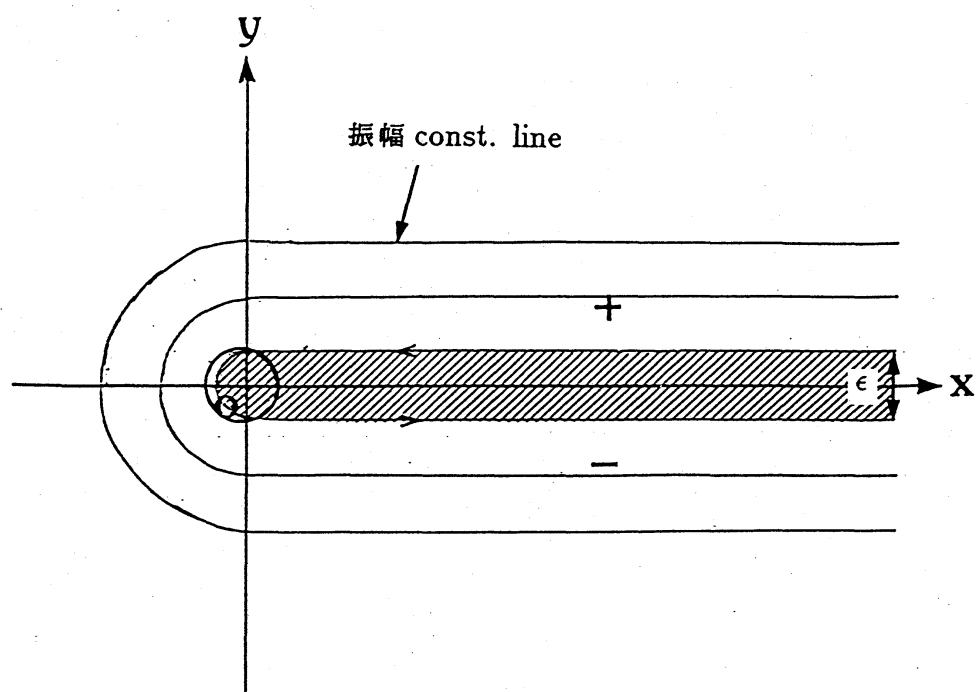


图 1 Hybrid topological defect